Übungsstunde lineare Algebra:

Heutige Themen:

- ▷ Givensrotation
- ▷ QR-Zerl. mit "
- ▷ Housholdertransformation
- ▷ QR-Zerl. mit "
- ▷ LR-Zerl. Erklärung

Fehler der Serie:

Nach den Gaussen:

$$\begin{array}{ccc|c} & & x_3 & \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \cancel{x_1 = t} \in \mathbb{R} \\ \\ x_3 = t \in \mathbb{R} \end{array}$$

Givensrotation:

Definition:

$$\underline{\underline{G}}_{ij} = \begin{array}{c|cccccc|} & & & i & & j & \\ \hline & 1 & & & 0 & & \\ & & 1 & & & & \ddots \\ i & & & c & \cdots & s & \\ & 0 & & \vdots & 1 \quad 1 & \vdots & 0 \\ j & & & -s & \cdots & c & \\ & \ddots & & & 0 & & 1 \quad 1 \quad 1 \end{array}$$

$c = \cos\varphi$

$s = \sin\varphi$

Bsp: $\underline{\underline{G}}_{13} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$

$\downarrow$

Drehung in der x_1-x_3 -Ebene, oder x-z

$$\underline{\underline{G}}_{12} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{D}}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{G}}(-\varphi)$$

QR-Zerlegung mit der Givensrotation:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{b} \qquad | \underline{\underline{Q}}^{-1} \cdot$$

$$\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{\underline{Q}}^{-1}\underline{b}$$

$$= \underline{\underline{Q}}^{T}\underline{b}$$

Beispiel 3.2)

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}, \quad \underline{\underline{A}} = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 3 \\ 2 & \boxed{-1} & 4 \\ & 2,1 & \end{array}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \boxed{7} & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

3,1

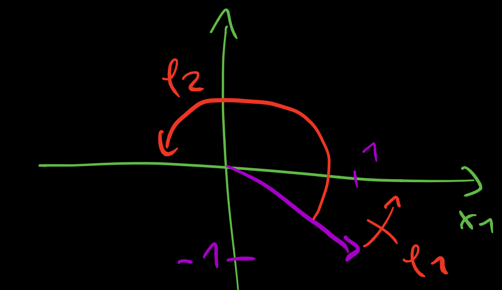
$$\rightarrow \underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{G}}_1 \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi - \sin\varphi & 3\cos\varphi + 4\sin\varphi \\ \boxed{-\sin\varphi - \cos\varphi} & -3\sin\varphi + 4\cos\varphi \end{bmatrix}$$

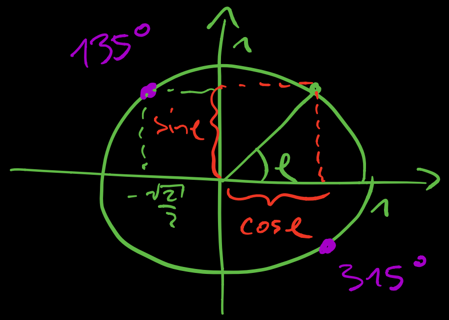
$$\overset{!}{=} 0$$

Geometrisch:



$$\Rightarrow \quad -\sin\varphi - \cos\varphi \overset{!}{=} 0$$

$$\cos\varphi = -\sin\varphi \quad \longrightarrow$$



$$\underline{\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\underline{\sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{G}} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}, \quad \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}}}$$

Wollten $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}}$, haben $\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{A}}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{G}}^T = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}}$$

Unbedingt Resultat auf Orthogonalität überprüfen!

Housholdermatrix:

$$\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{I}}_n - \underbrace{\frac{2}{\underline{v}^T \cdot \underline{v}} \cdot \underline{v} \cdot \underline{v}^T} = \underline{\underline{I}}_n - 2\,\underline{u}\,\underline{u}^T, \text{ falls } \underline{u} = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}$$

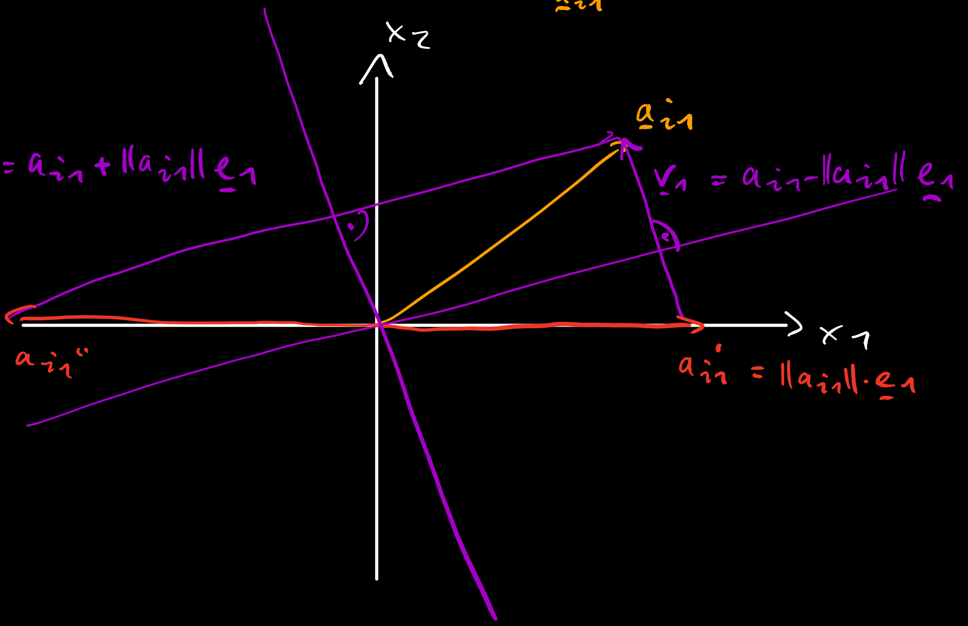
Projektor
auf die Hyperebene,
für welche $\underline{v}$ der
Normalenvektor ist

QR-Zerlegung mit der Housholdermatrix:

Beispiel 3.3: $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$, $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} * \\ * \\ * \end{matrix} & \begin{matrix} * \\ * \\ * \end{matrix} \end{bmatrix}$

$\underline{a}_{:1}$

Grafisch:



$$a_{i1} = \begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}, \quad \|a_{i1}\| = \sqrt[2]{4+4+1} = \underline{3}, \quad \underline{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{v}} = a_{i1} \textcircled{+} \|a_{i1}\| \underline{e}_1 = \begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix}5\\2\\1\end{bmatrix}}$$

$$\underline{u} = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{25+4+1}} \begin{bmatrix}5\\2\\1\end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix}5\\2\\1\end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{H}} = \underline{\underline{I}} - 2\underline{u}\,\underline{u}^T = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} - \frac{1}{15}\begin{bmatrix}5\\2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&2&1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} - \frac{1}{15}\begin{bmatrix}25&10&5\\10&4&2\\5&2&1\end{bmatrix}$$

$$= \underline{\frac{1}{15}\begin{bmatrix}-10&-10&-5\\-10&11&-2\\-5&-2&14\end{bmatrix}}$$

Überprüfen:

- H symmetrisch?
- H orthogonal?

$$\underline{\underline{R}}' = \underline{\underline{H_1}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix}\boxed{-3}&*&*\\0&*&*\\0&*&*\end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow H_2' = \begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad H_2 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&a&b\\0&c&d\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad H_2 \cdot R' = \begin{bmatrix}-3&*&*\\0&\Delta&\Delta\\0&0&\Delta\end{bmatrix} = R$$

$$= \underline{\underline{H}}_2 \cdot \underline{\underline{H}}_1 \underline{\underline{A}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{H}}_2 \underline{\underline{H}}_1 \cdot \underline{\underline{A}}$$

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}}\, \underline{\underline{R}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{Q}} = \left(\underline{\underline{H}}_2 \underline{\underline{H}}_1\right)^{-1}$$

$$= \left(\underline{\underline{H}}_2 \underline{\underline{H}}_1\right)^{T}$$

$$= \underline{\underline{H}}_1^{T} \cdot \underline{\underline{H}}_2^{T}$$

LR-Zerlegung:

Bsp.: LR-Zerl. von $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{P} \left| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{matrix}}_{A} \right. \qquad \begin{matrix} II - (+2)I \\ \longrightarrow \\ III - (+3)I \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{matrix} \right.$$

$$\begin{matrix} III - (+2) II \\ \longrightarrow \end{matrix} \quad \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{P} \left| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}}_{R} \right.$$

Die Operationen, welche $\underline{\underline{A}}$ zu $\underline{\underline{R}}$ wird:

$$\left.\begin{aligned} &\text{II} - 2\,\text{I} \\ &\text{III} - 3\,\text{I} \end{aligned} : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \atop \text{III} - 2\,\text{II} : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{\underline{A}}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{G}}$$

Gaussmatrix

$$\left.\begin{aligned} \underline{\underline{R}} &= \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{A}} \\ \underline{\underline{A}} &= \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{R}} \end{aligned}\right\} \quad \underline{\underline{L}} = \underline{\underline{G}}^{-1}$$

Gauss-Jordan

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{matrix}}_{G} \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right.$$

$$\downarrow$$

$$\vdots$$

$$\downarrow$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \left| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix}}_{L} \right.$$